

оригинальная статья

## Статистическая оптимизация показателей региональной экономики в неоднородной изменчивой среде

Черкашин Александр Константинович  
Институт географии им. В. Б. Сочавы Сибирского отделения  
РАН, Россия, Иркутск

Мядзелец Анастасия Викторовна  
Институт географии им. В. Б. Сочавы Сибирского отделения  
РАН, Россия, Иркутск  
<https://orcid.org/0000-0002-2951-895X>  
[anastasia@irigs.irk.ru](mailto:anastasia@irigs.irk.ru)

Поступила 21.01.2022. Принята после рецензирования 20.05.2022. Принята в печать 23.05.2022.

**Аннотация:** Решается задача моделирования развития социально-экономической ситуации в регионах на примере статистической оптимизации неизвестной оценочной (индикативной) функции, описывающей связи между экономическими показателями территориальной системы. Для формализации связей, идентификации параметров оптимизации, классификации ситуаций экономических систем по признакам неоднородности геоисторической среды и фиксации моментов трансформации социально-экономических режимов используется байесовский подход. При этом переменные и коэффициенты модели интерпретируются как билинейные характеристики, что позволяет отразить единство внутренних и внешних системных свойств и одновременное влияние фундаментальных экономических факторов и условий географической и исторической среды, что важно для решения современных проблем в области оптимального регионального развития в неоднородном природном и инфраструктурном окружении. При анализе показателей региональной экономики исследуется эмпирическая зависимость размеров внутренних инвестиций от объемов производства в промышленности и сельском хозяйстве в регионах России за 2000–2016 гг., что продемонстрировано на примере экономики Иркутской области. Показаны закономерности инвестиционно-производственного процесса в докризисный, кризисный и посткризисный периоды. Выделены соответствующие характерные временные периоды (2000–2006, 2006–2008 и 2008–2016) изменения условий инвестиционной среды для ведения промышленного производства, в то же время для сельскохозяйственной деятельности такая взаимосвязь отсутствует. Выявлено, что под воздействием геоэкономических условий средовые показатели региональной системы меняются, что влияет на выбор оптимального решения субъектами экономической деятельности в области инвестирования.

**Ключевые слова:** статистическая оптимизация, средовые показатели, моделирование экономической ситуации, инвестиции

**Цитирование:** Черкашин А. К., Мядзелец А. В. Статистическая оптимизация показателей региональной экономики в неоднородной изменчивой среде. *Вестник Кемеровского государственного университета*. Серия: Политические, социологические и экономические науки. 2022. Т. 7. № 2. С. 255–265. <https://doi.org/10.21603/2500-3372-2022-7-2-255-265>

full article

## Statistical Optimization of Regional Economy Indices in a Heterogeneous Changeable Environment

Alexander K. Cherkashin  
V. B. Sochava Institute of Geography, Siberian Branch of Russian  
Academy of Sciences, Russia, Irkutsk

Anastasia V. Myadzelets  
V. B. Sochava Institute of Geography, Siberian Branch of Russian  
Academy of Sciences, Russia, Irkutsk  
<https://orcid.org/0000-0002-2951-895X>  
[anastasia@irigs.irk.ru](mailto:anastasia@irigs.irk.ru)

Received 21 Jan 2022. Accepted after peer review 20 May 2022. Accepted for publication 23 May 2022.

**Abstract:** The authors modelled the development of a regional socio-economic situation using static optimization of an unknown function that describes the relationship between the economic parameters of a territorial system. They applied the Bayesian approach to formalize relations, identify optimization parameters, classify the situation of geographically homogeneous economic systems, and describe the transformation of socio-economic regimes. By using variables and coefficients as bilinear characteristics, they reflected the unity of internal and external system properties, as well as the joint

effect of geographical and historical economic factors and conditions. The analysis of regional economic indices revealed the empirical dependence of domestic investment on industry and agriculture in the Russian regions in 2000–2016. The results show some patterns of investment and production processes in the Irkutsk region economy in the pre-crisis, crisis, and post-crisis periods. For industrial production, the changes in the investment environment corresponded to 2000–2006, 2006–2008, and 2008–2016. Agricultural production demonstrated no such relationship. Therefore, the geo-economic conditions change the environmental indicators of the regional system that affects the optimal investment solutions made by economic activity subjects.

**Keywords:** statistical optimization, environ parameters, economic situation modeling, investment

**Citation:** Cherkashin A. K., Myadzelets A. V. Statistical Optimization of Regional Economy Indices in a Heterogeneous Changeable Environment. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Politicheskie, sotsiologicheskie i ekonomicheskie nauki*, 2022, 7(2): 255–265. (In Russ.) <https://doi.org/10.21603/2500-3372-2022-7-2-255-265>

## Введение

Математический анализ пространственных и временных рядов статистических данных необходим для выявления скрытых закономерностей варьирования социально-экономических ситуаций различных масштабных уровней, сравнения этих ситуаций, прогнозирования их развития и оптимизации планов хозяйственной деятельности, например на основе асимптотической теории, учитывающей возможное наличие у рассматриваемых переменных стохастического тренда [1–4]. Используемые для этой цели сложные математические модели часто слабо обоснованы и трудны при идентификации, что порождает эконометрические проблемы, связанные с задачами поиска статистических методов, нацеленных на обработку конечных выборок дискретных стохастических величин. В этом случае удается заменить результаты аналитических преобразований функций статистическими процедурами с оценкой достоверности выводов, что особенно важно, когда вид функциональной зависимости переменных неизвестен, а решение задачи оптимизации осуществляется с учетом неопределенности состояния внешней среды с наличием разного рода рисков.

Для решения задач оптимального управления при наличии ошибок измерения и неполной исходной информации используется метод максимального правдоподобия [5, с. 159; 6], экспериментально-статистические методы оптимизации, когда для поиска экстремальных значений реализуется оптимальная стратегия проведения наблюдений [7–11], стохастическое программирование решения условных экстремальных задач при неполной информации об условиях задачи [12; 13].

Одним из методов оптимизации является анализ среды функционирования (АСФ). Математическая модель АСФ формулируется в терминах линейного программирования, когда каждая система описывается пространством векторов входа и выхода, соотношениями их значений и естественными ограничениями [14; 15]. С помощью алгоритма АСФ в этом пространстве определяются объекты с максимальными показателями, координаты которых рассматриваются как целевые позиции для остальных объектов и управляемого изменения входов и выходов

для повышения их эффективности. Эффективность конкретного объекта определяется через относительное процентное расстояние от объектов с максимальной эффективностью, поэтому значения эффективности независимы от выбранных шкал измерения входов и выходов.

Решаются задачи восстановления зависимостей при отсутствии модели восстанавливаемой функции [16]. Для восстановления из множества функций выбирается такая, которая наилучшим образом приближается к совокупности имеющихся данных. Задачи восстановления зависимостей рассматриваются с единых позиций минимизации среднего риска по эмпирическим данным. Причем разные задачи не похожи в той степени, в которой различаются функции потерь и плотности вероятностей при минимизации среднего риска. В каждой задаче параметр, доставляющий минимум функционалу риска, определяет искомую функциональную зависимость. Например, метод наименьших квадратов (МНК) работает при нормальном распределении помех в функции максимального правдоподобия. Также нормальный закон плотности распределения описывает помехи, которые возникают при изменениях, происходящих в одних и тех же условиях [16]. При этом он обладает наибольшей энтропией, когда результат измерения будет в наивысшей степени не определен, как обычно бывает в экономических исследованиях. МНК, который доставляет минимум квадратичному функционалу (помех) отклонения эмпирических от теоретических значений, является экстремальным методом оценки параметров нормальной регрессии.

Особый интерес представляет байесовский подход, предполагающий обновление сложившихся представлений при получении новых данных [17]. Он основан на субъективно-вероятностном способе реализации принципа максимального использования априорной информации об исследуемом процессе наряду с исходными данными малых выборок [18]. Так решаются задачи теории оптимальных статистических решений, основанные на анализе функций вероятности и полезности от параметров, в том числе с квадратичной оценочной функцией разницы между значениями параметров исхода

и гипотетически выбранного решения [19]. Для этого используются МНК для расчета коэффициентов линейных регрессионных уравнений.

Каждое из гипотетических соотношений в экономике рассматривается при прочих равных условиях, отражающих воздействие неучтенных объясняющих переменных (факторов, предикторов), которое в реальных условиях не может быть удовлетворено [20]. Обычно для учета этого влияния в линейные модели добавляют слагаемое, трактуемое как ошибку регрессии, хотя существующего обоснования данного действия недостаточно. При моделировании социально-экономических процессов и явлений статистическая ошибка должна интерпретироваться шире, а именно как единство внутренних и внешних системных свойств, в частности влияния фундаментальных экономических факторов и условий географической и исторической среды, что важно для решения современных проблем в области оптимального регионального развития в неоднородном природном и инфраструктурном окружении.

## Методы и материалы

Байесовский подход, по мнению С. А. Айвазяна [18], является одним из возможных способов формализации уверенности в том, что точность определения значения параметра возрастает и корректируется по мере поступления информации об исследуемом явлении, и могут быть различные научные интерпретации этого тезиса. В логической схеме байесовского метода оценивания, прежде всего, фиксируются априорные сведения о параметрах  $x_0 = \{x_{0i}\}$  – векторе ( $i=1,2,\dots,n$ ), который в данном случае отождествляется с состоянием среды экономической системы (первое приближение  $x_0(0)$ ). Дополнительно задается поток результатов независимых наблюдений за состоянием системы  $x(t) = \{x_{0i}(t)\}$  в разные моменты времени  $t$  или в различных местоположениях. С каждым этапом  $t$  уточняется величина  $x_0(t)$ , и чем значительней объем выборки  $t$ , тем больше информации для определения неизвестного параметра  $x_0(t) \rightarrow x_0$  и тем ближе к истинным будут статистические выводы. Задается функция правдоподобия  $L[x(t)|x_0(t)]$ , определяющая оценку набора  $x(t)$  при различных значениях параметра  $x_0(t)$ . Специфика байесовского подхода определяется вероятностной интерпретацией этой функции. Функция, как правило, зависит от переменной разности  $y(t) = x(t) - x_0(t)$  а статистические оценки – различия  $y_0(t) = x_0(t) - x_0$ . Вектор  $y(t) = \{y_i(t)\}$  формирует локальную систему отсчета относительно центра  $x_0 = \{x_{0i}\}$ , поэтому значения  $y_i(t)$  не зависят от координат центра. Эта позиция аналогична идеям модели АСФ, где  $x_0$  задает целевые характеристики объектов с максимальными значениями показателей.

В связи с этим обратим внимание на оптимизационный принцип Гаусса наименьшего принуждения [21], сформулированный для механики и базирующийся на идее МНК, лежащего в основе аналитико-статистических исследований [22]. Принцип Гаусса утверждает, что для

любых истинных движений мера отклонения (принуждение) от свободного движения минимальна:

$$S(y) = \sum_i m_i y_i^2 \rightarrow 0, y_i = x_i - x_{0i},$$

где  $x = \{x_i\}$ ,  $x_0 = \{x_{0i}\}$  – характеристики истинного и свободного движения;  $y = \{y_i\}$  – мера принуждения;  $m = \{m_i\}$  – весовые коэффициенты. Вектор принуждения  $y = x - x_0$  отражает последствия совокупного влияния местных факторов (сил) на поведение системы. При постоянном  $m$  минимум  $S(y)$  по  $y$  обеспечивается при  $y_i = x_i - x_{0i} = 0$ , т. е. в истинном средообусловленном состоянии  $x_i = x_{0i}$  по всем параметрическим показателям.

Состояние системы описывается оценочными функциями связи  $F = F(x)$  разной сложности от набора переменных  $x = \{x_i\}$ . Для исследования их свойств используются методы линеаризации – представления нелинейных функций системой линейных уравнений, эквивалентной исходной функции. Считается, что использование методов линеаризации имеет ограничения, поскольку эквивалентность исходной и линеаризованных систем сохраняется лишь в локальной области переменных, и если система  $F(x)$  переходит с одного режима функционирования на другой, изменяется ее линеаризованная модель. Поскольку свойства линейных векторных пространств многообразны и хорошо исследованы в разных геометрических интерпретациях, то применение линеаризации позволяет выяснить качественные и количественные свойства базовой нелинейной зависимости. Особое научное значение и распространение линеаризация получила в теории расслоения над многообразиями в дифференциальной геометрии и ее приложениях [23].

Линейное уравнение

$$F(x) = ax + b \quad (1)$$

идентифицируется методами регрессионного анализа с оценкой коэффициентов  $a$  и  $b$ , отражающих соответственно наклон и отрезок  $b = F(0)$  графика линейной зависимости, с известными процедурами оценки достоверности этих коэффициентов и линейной зависимости [24–27], что между коэффициентами уравнений регрессии, найденных по независимым выборкам, существует линейная связь ( $x_0, F_0$  – константы):

$$b = -ax_0 + F_0. \quad (2)$$

Для выявления этой связи сначала по данным восстанавливаются взаимозависимости эконометрических показателей (1) для разных ситуаций или регионов, а затем по (2) находятся величины  $x_0, F_0$ . Чем они ближе к постоянным значениям, тем однородней выборка регионов по набору ( $x_0, F_0$ ), идентифицирующему состояние среды, что становится основой для классификации ситуаций или районирования экономических систем по признакам однородности геоисторической среды [28], а также для фиксации моментов трансформации социально-экономических

режимов (совокупности условий среды), выраженной в смене значений  $(x_0, F_0)$ .

Коэффициенты  $a = \{a_i\}$  и  $b(a)$  изменяются в пространстве и во времени, и их варьирование дает возможность установить зависимость (2). Подставляя выражение (2) в (1), получим:

$$F(x) - F_0 = a(x - x_0) \quad (3a)$$

или

$$f(y) = ay, y = x - x_0, f(y) = F(x) - F_0, F_0 = F(x_0) \quad (3b)$$

Уравнение (3a) при разных  $a$  определяет пучок линий с центром  $(x_0, F_0)$ , а уравнение (3b) – пучок с центром в начале координат. Уравнения (1) для разных ситуаций в центрированных переменных  $y$  имеют эквивалентный вид (3b) даже в том случае, если величина  $x_0$  изменяется. Для статистически достоверного существования соотношений (3) необходимо, чтобы ошибка  $s^2 = (b + ax_0 - F_0)^2 \rightarrow 0$  была минимальной, что обеспечивается привлечением в статистические расчеты однородных по параметрам  $(x_0, F_0)$  массивов данных.

Вариантом уравнения (3a) является модель CAPM оценки долгосрочных активов, связывающая ожидаемые ставки доходности на долгосрочный актив  $F = E(F_i)$  и рыночной доходности  $x$ :

$$F = F_0 + a(x - x_0),$$

где в данном случае  $F_0 = x_0$  – безрисковая ставка доходности;  $a = \beta$  – бета-коэффициент чувствительности актива к изменениям рыночной доходности  $x$ , является мерой рыночного риска акции, показывающей изменчивость доходности акции к доходности на рынке в среднем. За фоновую безрисковую ставку дохода  $F_0 = x_0$  принимается доходность государственных ценных бумаг.

Другим примером реализации линейной связи (3a) является экономический закон Оукена, отражающий эмпирическую зависимость между уровнем безработицы  $x$  и ВВП  $F(x)$  в стране. Величина  $a = -\beta F_0 / 100$ , где  $\beta$  – коэффициент Оукена, показывающий, на сколько процентов снижается ВВП при увеличении безработицы на 1 %. Значение  $a$  определяется величиной потенциального ВВП  $F_0$ , зависящего от состояния социально-экономической среды страны. Средозависимая величина  $x_0$  в данном случае соответствует естественному уровню безработицы в стране, а разрыв  $(x - x_0)$  имеет смысл уровня циклической безработицы. Закон Оукена является устойчивой и универсальной связью, но с различающимися по странам значениями коэффициентов [29]. Причины геоэкономического пространственного варьирования – это в основном институциональные и правовые факторы среды, уменьшающие гибкость рынка труда.

Эмпирические закономерности (1)–(3) линейной связи переменных можно постулировать как некоторый закон зависимости измеряемых величин, который должен выводиться из метатеоретических гипотез, сформулированных как естественное ограничение действия

абстрактных математических формул в терминах теории расслоения линейных пространств на многообразиях связи переменных [30; 31].

Всякое многообразие – это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству размерности  $n$ , т.е. такое пространство локально сходно с линейным евклидовым пространством – прямой линией ( $n = 1$ ), плоскостью ( $n = 2$ ), гиперплоскостью ( $n \geq 3$ ). Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если две различные его точки обладают непересекающимися окрестностями, т.е. в некотором смысле изолированы.

Функции  $F(x)$  существуют в двух эквивалентных формах как многообразие  $F(x_0)$  (поверхность, база расслоения) и как множество касательных пространств  $T_{x_0}F$  к  $F(x_0)$  в разных точках  $(x_0, F_0)$  с плоскостями  $T(x, x_0)$  – слоями расслоения пространства параметров  $x = \{x_i\}$ . В параметрическом линейном пространстве  $x \subset X$  каждое касательное пространство (плоскость, слой) описывается уравнением пучка вида (3a) или в многомерном случае выражением:

$$T(x, x_0) = \sum_{i=1}^n a_i (x_i - x_{0i}) + F_0 \quad (4a)$$

или

$$f(y) = \sum_{i=1}^n a_i y_i. \quad (4b)$$

Таким образом, в модели учитываются непрерывные и дискретные свойства реальности. Непрерывное многообразие  $F(x_0)$  отображает свойства геоисторической среды хозяйственной деятельности, а непересекающиеся дискретные слои  $T(x, x_0)$  соответствуют зависимостям  $F(x)$ , реализуемым в конкретных условиях среды  $x_0$  касательного пространства. Свойства касательного пространства, в том числе коэффициенты  $a_i(x_0)$ , определяются координатами точки касания  $x_0$ , но в общем случае являются переменными величинами  $a_i(y)$ , когда  $T(x, x_0)$  и  $f(y)$  в (4) представляют собой пучки линейных связей (4b), причем  $a_i(y)$  в (4b) зависят от значений внутренних координат  $y$ , но не зависят от положения центра  $x_0$ .

Для выявления этих связей необходимо исходить из математических свойств касательных преобразований Лежандра гладких выпуклых или вогнутых невырожденных функций  $F(x) \rightarrow H(a)$  в аналогичные функции чувствительности  $H(a)$  от двойственных переменных  $a = \{a_i\}$ :

$$F(x) = -H(a) + \sum_{i=1}^n a_i x_i, a_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (5)$$

Частная производная  $a_i$  (переменная величина) – частная чувствительность функции  $F(x)$  к изменению параметра  $x_i$  (предельная оценка); тогда  $H(a)$  – функция интегральной чувствительности.

Сумму исходных и преобразованных функций наборов измеряемых величин  $x$  и  $a$  условно назовем действием процесса или явления:

$$D(x, a) = F(x) + H(a) = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \quad (6)$$

Согласно неравенству Юнга [32, с. 74] в общем случае  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \geq D(x, a)$ , поэтому равенство (6) выражает своеобразный принцип наибольшего действия.

Уравнение (5) сводится к уравнению (4а) при условии (7а):

$$H(a) = \sum_{i=1}^n a_i x_{0i} - F_0, \quad (7a)$$

$$f(y) = \sum_{i=1}^n a_i y_i, \quad (7б)$$

$$f(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} y_i, \quad (7в)$$

когда функция  $f(y)$  в смещенных относительно постоянной среды переменных  $y = x - x_0$  представлена билинейным однородным уравнением (7б) относительно векторов  $x = \{x_i\}$  и ковекторов  $a = \{a_i\}$  – компонентов градиента функции  $F(x)$ . Это уравнение эквивалентно уравнению (7в), известному как уравнение Эйлера, что выделяет множество функций  $f(y)$  как однородные функции первого порядка  $f(ky) = kf(y)$ , когда в количественном выражении моделируемые связи зависят от масштаба экономического явления в пространственном или временном выражении, например от курса валют. С другой стороны, свойство однородности позволяет избавиться от этой зависимости, привести соотношения к универсальному виду. Формула (7а) аналогична уравнению (2), связывающему коэффициенты уравнения множественной регрессии, т. е. коэффициент  $b$  имеет смысл отрицания функции преобразования Лежандра  $b = -H(a)$ , заданной в линейном виде (7а). В данном исследовании важным пунктом является статистическая проверка гипотезы (7а).

Функция (5) достигает своего экстремального значения  $F(x) = F_0$  при  $a_i = 0$  в точке  $x = x_0$ . Минимум  $F(x)$  по  $x$  соответствует минимизации правой части соотношения (5) по  $a$  [32, с. 74]:

$$F_m(x) = \min_a \sum_{i=1}^n a_i (x - x_{0i}) = 0.$$

Значение  $F(x)$  всегда зависит от разницы  $y = (x - x_0)$  и имеет экстремальное значение (минимум или максимум) при  $y = 0$ . Например, для функции  $F(x)$ , квадрат отклонения которой

$$s^2 = [F(x) - F_0]^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{0i})^2$$

соответствует формулировке принципа принуждения Гаусса, минимум достигается при  $y_0 = x_i - x_{0i} = 0$  и равен  $F(x) - F_0$ . Переменная

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} = m_i (x_i - x_{0i}) / (F - F_0)$$

в этой точке достигает минимума  $a_i = 0$ . Максимум  $F(x) \rightarrow \infty$ , когда также  $a_i = 0$ , а величина  $H(a) = -F_0$  в обоих случаях. При постоянном значении  $x_{0i} > 0$  увеличение  $a_i > 0$  определяет рост величины  $H(a)$ , что указывает на более благоприятную текущую ситуацию по критерию  $F(x)$ , что позволяет использовать показатель  $H(a) = -b$  для сравнительного статистического

анализа состояний и тенденций развития экономик разных регионов в различные исторические периоды.

Выполнение условия (7а) означает, что все линии функциональных связей (7б) образуют пучок с центром  $(x_0, F_0)$ , и всякое отклонение линий от центра пучка рассматривается как неоптимальное функционирование. Оптимальной является траектория:

$$F_p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - H_p(a), \quad H_p(a) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - F_0, \quad (8)$$

где  $x_i, F(x)$  – исходные статистические данные для расчета текущих значений  $H(a) = -b$  и вычисления  $(x_0, F_0)$  по ним;  $F_p(x), H_p(a)$  – рассчитанные по  $(x_0, F_0)$  и  $a_i$  (исправленные) значения, обеспечивающие минимизацию варьирования переменной  $(H(a) + b)$  вокруг нуля (центра пучка). По этой причине точность знания координат центра  $(x_0, F_0)$  определяет точность оптимизации. Изменчивость  $H(a)$  относительно колебаний положения центра равна смещению значений коэффициентов чувствительности:

$$\frac{\partial H(a)}{\partial x_{0i}} = a_i - \frac{\partial F_0}{\partial x_{0i}} = a_i - a_{0i}. \quad (9)$$

Положение среднего центра устойчиво при  $a_{0i} = 0$  и крайне неустойчиво при  $a_{0i} = 0$ , когда  $H(a) = -F_0$  достигает минимального значения. Изменяемая часть уравнения (5) равна  $a = \sum_{i=1}^n a_{0i} x_{0i} \rightarrow 0$ . Поскольку величина  $D(x, a) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  статистически задана, согласно (8), для достижения максимума  $F(x)$  должна минимизироваться функция  $H_p(a) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{0i}) x_{0i}$  путем регулирования изменения среднего параметра  $a_{0i}$  в сторону увеличения, что определяет рост значений  $(x_0, F_0)$ . Оптимальное решение  $F_p(x)$  находится в окрестности величины действия  $D(x, a)$  минимизацией  $H_p(a)$ .

В модели CAPM, записанной в виде:

$$F - F_0 = \alpha + \beta(x - x_0),$$

коэффициент  $\alpha$  – это мера активного (предпринимательского) избыточного ( $\alpha > 0$ ) дохода от инвестиций, значения которого сравнивается с подходящим индексом рынка  $F_0 = x_0$ . Величина  $\alpha = 1\%$  означает, что доход от инвестиций за выбранный период был на 1% лучше, чем рыночный доход. Коэффициенты  $\alpha, \beta$  являются ключевыми в модели CAPM теории инвестиционного портфеля и связаны со статистическими показателями типа стандартного отклонения или R-квадрата. Параметры уравнений  $\alpha, \beta$  измеряют волатильность или риск, связанные с неопределенностью изменения состояния инвестиционной среды. Обобщенное статистическое уравнение факторного влияния на доходы инвестиционных фондов включают учтенные в модели факторы  $x$ , неучтенные факторы (условия)  $x_0$ , случайные флуктуации и альфу управления фондом, величина которой в одно-родной рискованной среде снижается со временем [33]. Эти наблюдения соответствуют свойствам уравнения  $a_0 = \sum_{i=1}^n a_{0i} x_{0i}$ , отражающего адаптацию инвестиционного процесса к новой среде.

## Результаты

При проведении исследований используются различные оценочные (индикативные) функции  $F(x)$ , устанавливающие связи между экономическими параметрами территорий в разные исторические периоды. Экономическая дифференциация территории России по различным географическим направлениям определена своеобразием природно-ресурсного потенциала и разной степенью освоенности регионов, особенностью их геосторической среды, учитывающей текущую трансформацию глобальной политики и экономики.

В данном исследовании в качестве индикативной функции (индиката)  $F(x)$  используется объем внутренних инвестиций в экономику регионов России. Индикаторами служат валовые объемы производства в промышленности  $x_1$  и сельском хозяйстве  $x_2$  в денежном выражении (млрд руб.). Расчеты основаны на социально-экономических показателях из отчетов Госкомстата РФ за 2000–2016 гг., собранные в геоинформационную базу данных пространственно-временного статистического анализа.

Пофакторные градиенты  $a_i (i = 1, 2)$  индикатов  $F(x)$  в данном случае являются коэффициентами акселерации (акселераторы) инвестиционного процесса. Своеобразие функционирования системы определяется зависимостью показателя внутренних инвестиций в регионе от объемов производства различных отраслей хозяйства с учетом состояния внешних геоэкономических и местных региональных условий хозяйственной деятельности.

Рассматриваемый период отражает рост региональных экономик после финансово-экономического кризиса 1998 г. в России и изменения, связанные с мировым экономическим кризисом 2008 г. Современные кризисы глобальных финансов стали проявлением ранее сформировавшейся геоэкономической среды, следствием совместных действий различных государственных и международных организаций. В частности, повысилась роль государственного регулирования как фактора обеспечения устойчивости экономического роста, которое включает мероприятия по формированию новой правовой и финансово-экономической среды, в том числе активную помощь организациям и реформирование системы финансовых институтов и инструментов, инвестиции в создание и обновление инфраструктуры национальных экономик, стимулирование внутреннего спроса, формирование нового технологического типа мировой экономики [34–36].

Для сравнительных исследований использованы сопоставимые данные по регионам России с развитой промышленностью и сельским хозяйством. Рост инвестиций должен описываться гладкими функциями и их кривыми без резких выбросов показателей. В качестве примера в статье используются экономические показатели по Иркутской области за 2000–2016 гг.; в таблице приведены результаты статистической обработки этих рядов данных.

Отрезок  $b$  и акселераторы  $a_1$  и  $a_2$  рассчитываются по исходным значениям инвестиций  $F$  и выпусков  $x_1, x_2$

методом скользящей регрессии МНК: по 3 точкам – одна в середине и две по краям. По этой причине два года в таблице и на графиках теряются. Этим методом вычисляется временная изменчивость коэффициентов регрессии [37; 38]. Затем анализируется эмпирическая регрессионная зависимость  $b$  от  $a_1$  и  $a_2$  вида (7а) сначала ( $t = 0$ ) по трем первым определенным точкам  $b(a_1, a_2)$  с вычислением первого приближения значений координат центра  $(x_{01}, x_{02}, F_0)$ . Потом, согласно байесовской схеме, в исходную выборку добавляется четвертый элемент временного ряда и уточняется положение центра и так далее с выходом на стационарные значения координат центра при наличии устойчивой геосторической среды.

Как известно, расчет по МНК свободного члена регрессионного уравнения проводится по средним значениям исходных величин:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{F} : b = -a_1 \bar{x}_1 - a_2 \bar{x}_2 + \bar{F}.$$

Эта формула напоминает уравнение связи коэффициента  $b$  с показателями средовых норм:

$$b = -a_1 x_{01} - a_2 x_{02} + F_0.$$

Различие этих вариантов  $b$  определяется разницей средних и норм  $x_1 - x_{01}$  в схеме их пошагового расчета, начиная с первого приближения. Сходство полученных результатов для хозяйства Иркутской области незначительно (коэффициент корреляции  $R = 0,53$ ), что позволяет считать параметры средовых норм независимыми от исходных данных и постоянными величинами (инвариантами), значения которых необходимо вычислить.

Величина акселераторов заметно варьирует вокруг среднего значения  $a_1 = -0,30 \pm 0,48$ ;  $a_2 = -5,67 \pm 11,88$ , причем инвестиции в сельскохозяйственное производство сильнее зависят от выпусков:

$$a_1 = -0,40a_2 + 0,17 (R = -0,90).$$

Максимум значения  $b = 282,7$  млрд руб. приходится на годы кризиса 2008–2009 гг., что соответствует минимуму функции  $H(a) = -b$ . Частотно преобладают значения  $b$ , близкие к нулю. Характеристика среды ведения сельского хозяйства в Иркутской области за весь период изменяется незначительно:  $x_{02} = 23,08 \pm 5,35$  млрд руб. (рис. 1). В изменении условий промышленного производства выделяются два периода до 2006 г. (I) и после 2008 г. (II), разделенные глобальным кризисом:

$$x_{01} = 120,6 \pm 13,1 \text{ (I)}; x_{02} = 348,6 \pm 11,4 \text{ (II)}.$$

На каждом уровне в указанные периоды условия варьируются незначительно ( $\alpha \approx 0$ ), а в переходный период  $\alpha_0 > 0$ . Аналогичные закономерности прослеживаются для средовой нормы инвестиций  $F_0$  (см. табл.). По этим причинам связь акселераторов со средой невелика:

$$R(a_1, x_{01}) = 0,22; R(a_2, x_{02}) = -0,26.$$

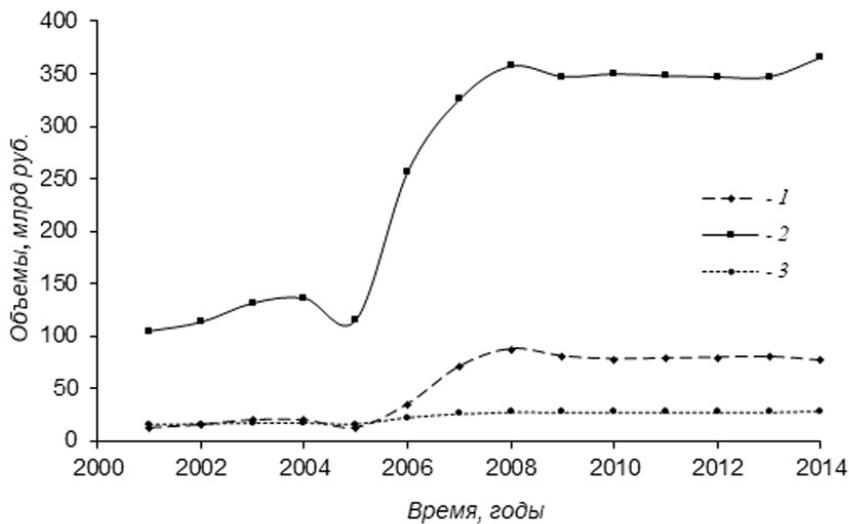


Рис. 1. Расчет параметров геосторической среды в виде показателей внутренних инвестиций  $F_0$  (1), объемов производства промышленности  $x_{01}$  (2) и сельского хозяйства  $x_{02}$  (3) в Иркутской области  
Fig. 1. Geohistorical environment parameters as indices of domestic investment  $F_0$  (1), industrial production  $x_{01}$  (2), and agriculture  $x_{02}$  (3) in the Irkutsk region

Табл. Обработка данных взаимосвязи внутренних инвестиций и выпусков продукции промышленного и сельскохозяйственного производства в Иркутской области за период 1999–2016 гг.

Tab. Interrelation of domestic investment and industrial and agricultural production in the Irkutsk region in 1999–2016

Год	Исходные данные			Коэффициенты регрессии			Координаты центра			Оптимизация		
	$F(x)$	$x_1$	$x_2$	$b$	$a_1$	$a_2$	$F_0$	$x_{01}$	$x_{02}$	$D$	$H_p$	$F_p$
	млрд руб.	млрд руб.	млрд руб.				млрд руб.	млрд руб.	млрд руб.			
1999	8,09	69,12	10,58	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2000	11,38	87,98	11,09	-0,97	0,18	-0,35	-	-	-	9,05	0,00	9,05
2001	12,76	105,13	16,22	-12,07	0,40	-1,08	12,76	105,13	16,22	23,45	14,03	9,42
2002	17,82	119,35	16,83	-522,00	-1,49	42,65	15,65	113,59	16,58	534,76	520,86	13,89
2003	20,88	139,44	17,61	7,63	0,18	-0,65	20,18	131,72	17,32	10,19	-5,95	16,13
2004	25,34	173,80	20,12	-46,57	-0,36	6,66	20,12	136,48	17,48	67,45	52,55	14,90
2005	30,77	204,39	22,58	18,79	0,49	-3,94	13,10	115,89	16,48	6,55	-23,08	29,63
2006	47,82	265,22	25,87	-201,41	-0,54	15,20	35,31	256,49	22,68	232,18	173,77	58,41
2007	122,45	278,25	31,24	-362,63	0,25	13,27	71,00	325,77	26,27	410,45	237,30	173,16
2008	127,86	309,96	31,05	282,68	0,13	-6,30	87,88	357,37	27,94	-160,24	-106,43	-53,81
2009	105,40	314,35	34,70	278,23	0,15	-6,32	80,86	347,50	27,76	-150,38	-104,79	-45,59
2010	102,45	412,35	37,46	-179,06	-0,35	11,37	78,07	350,04	27,86	284,45	132,56	151,89
2011	138,00	510,48	43,61	-121,33	-0,04	6,40	79,02	348,11	27,82	223,78	86,58	137,20
2012	156,47	582,53	46,93	-5,43	0,23	0,63	79,61	347,09	27,80	143,43	21,58	121,84
2013	170,83	636,94	50,11	-12,75	0,19	1,19	80,56	347,16	27,82	169,22	27,11	142,11
2014	192,46	709,46	56,42	-4,51	0,06	2,74	76,92	365,78	28,70	175,34	36,91	138,44
2015	211,80	881,49	59,72	-280,74	-0,06	9,19	-	-	-	473,22	130,50	342,71
2016	258,49	951,34	65,29	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Для поиска оптимальной траектории инвестирования при заданных средовых ( $x_{01}, x_{02}, F_0$ ) и производственных ( $a_1, a_2$ ) параметрах на основе уравнений (8) рассчитываются функции действия  $D$  и чувствительности  $H_p(a)$ , находится их разность:

$$F_p(x) = D(x, a) - H_p(a).$$

Эмпирические и теоретические значения внутренних инвестиций по Иркутской области, рассчитанные по параметрам докризисной геоисторической среды, имеют сопоставимые значения. В период кризиса, ориентируясь на эту среду, оптимальной стратегией следовало бы считать резкое сокращение и даже изъятие финансовых средств из оборота. Вычисления по параметрам посткризисной среды (рис. 2) дают более близкие к реальным оценки: ожидание лучших условий для бизнеса незначительно снижает текущие инвестиции в критический период.

Интегральная чувствительность  $H_p(a)$  инновационно-производственного процесса варьируется очень сильно: до кризиса –  $132,0 \pm 154,9$ , после –  $63,7 \pm 195,1$  млрд руб. Для разных периодов она коррелирована ( $R = 0,98$ ). Высокие значения  $H_p(a)$  указывают на благоприятные условия инвестирования, низкие соответствуют плохой бизнес-среде, отрицательные – прямо указывают на кризисные ситуации, что может использоваться для сравнительного геоисторического статистического анализа развития региональной экономики.

Различные экономики в инновационно-производственной сфере деятельности ведут себя по-разному, характеризуются различными некоррелированными по регионам показателями. Эти средообусловленные различия предстоит исследовать детально. Выделенная для Иркутской области четкая двухэтапная дифференциация параметров инвестиционной среды встречается нечасто. Увеличение объема инвестиций в денежном выражении имеет много причин, включая макроэкономические факторы колебания курса валют и инфляцию. Линейное увеличение масштаба цен в силу однородности уравнений связи переменных не влияет на результаты математического анализа, но обеспечивает дополнительную изменчивость

исходных показателей и позволяет решать статистическую задачу оценки средовых параметров, что было бы затруднительно при работе с индексными ценами.

## Заключение

Традиционные соотношения эконометрии неявно связаны с известными аналитическими формулами, которые используются для статистического решения оптимизационных задач. Базовой гипотезой становится утверждение о свойствах реальности как многообразия связей различных параметров экономических систем, что позволяет рассматривать каждую конкретную пространственную ситуацию в качестве результата расслоения – касательного слоя к поверхности оценочных функций, эквивалентных в слое пучку линейных зависимостей с центром, координаты которого соответствуют параметрам геоисторической макроэкономической среды (точке на поверхности многообразия среды).

Главная особенность решения статистической задачи заключается в том, что оценочная функция в явном виде не известна. Функция определяется величинами смещенных относительно средовых норм показателей  $y_i = x_i - x_{0i}$ , поэтому не зависит от величины этих норм. По этой причине с учетом принятых гипотез искомые функции являются однородными функциями первого порядка. Эти индикативные функции – своеобразные локальные метрики пространства показателей или производственные функции, заданные в показателях отклонения состояния системы от средовой нормы.

Исследована эмпирическая зависимость размеров внутренних инвестиций от объемов производства в промышленности и сельском хозяйстве в регионах России. Результаты продемонстрированы на примере экономики Иркутской области. Для статистического анализа используется метод скользящей регрессии для оценки производственных показателей (акселераторов) по группам отраслей и элементы байесовского подхода для последовательного определения индивидуальных средовых норм инвестиций на основе МНК. Точность байесовских оценок положения центра пучка взаимосвязей определяет

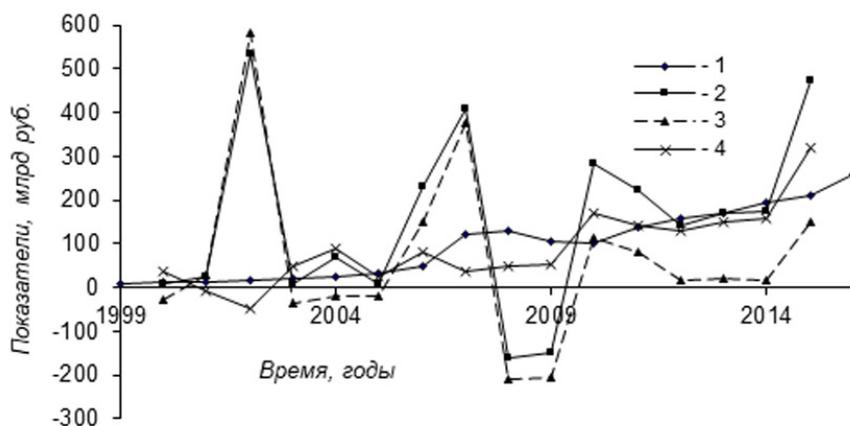


Рис. 2. Расчет показателей инвестиционного процесса в Иркутской области за 1999–2016 гг. с учетом особенностей состояния текущей геоисторической среды: эмпирические значения внутренних инвестиций  $F(x)$  (1), величина действия  $D$  (2), интегральная чувствительность  $H(a)$  (3) и оптимальные инвестиции  $F_p(x)$  (4)  
Fig. 2. Investment dynamics in the Irkutsk region in 1999–2016 based on the geohistorical status: empiric values of domestic investment  $F(x)$  (1), operation value  $D$  (2), integral sensitivity  $H(a)$  (3), optimal investment  $F_p(x)$  (4)

и точность оптимизационного решения. Под влиянием геоэкономических факторов и условий положение центра (среды) меняется, что влияет на выбор оптимального решения в области инвестиций субъектами экономической деятельности, ориентирующимися на прошлый опыт или ожидающими лучшего будущего в смысле создания новых благоприятных условий для бизнеса. По характеристикам условий среды статистически выделяются два периода – пред- и посткризисные годы.

Рассматриваемые уравнения имеют аналогии в разных моделях экономических исследований, которые могут быть проинтерпретированы в терминах особенностей пространства расслоения. Удаётся строго различить переменные, отражающие факторы и условия среды экономического развития. Совокупность условий определяет средовую норму (базовое значение), относительно которой рассматриваются изменения всех показателей, а полученная смещенная оценка не зависит от среднего влияния. Формирование новых расчетных параметров социально-экономической среды определяется состоянием и изменением геоэкономического фона, повышением роли государства и положительными ожиданиями со стороны инвесторов отдачи конкретных производств.

**Конфликт интересов:** Авторы заявили об отсутствии потенциальных конфликтов интересов в отношении исследования, авторства и / или публикации данной статьи.

**Conflicting interests:** The authors declared no potential conflicts of interests regarding the research, authorship, and / or publication of this article.

**Критерии авторства:** А. К. Черкашин – подбор и применение моделей и методов, анализ и интерпретация результатов. А. В. Мядзелец – применение моделей, выполнение расчетов, анализ и интерпретация результатов.

**Contribution:** A. K. Cherkashin selected and applied models and methods, as well as analyzed the results. A. V. Myadzelets applied the models, performed the calculations, and interpreted the results.

**Финансирование:** Исследование выполнено за счет средств государственного задания (№ госрегистрации темы: АААА-А21-121012190056-4).

**Funding:** The research was part of state task АААА-А21-121012190056-4.

## Литература / References

1. Hatanaka M. *Time series-based econometrics: unit roots and cointegration*. Oxford: Oxford University Press, 1996, 312. <https://doi.org/10.1093/0198773536.001.0001>
2. Maddala G. S., Kim In-Моо. *Unit roots, cointegration, and structural change*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998, 505.
3. Носко В. П. Эконометрика. Введение в регрессионный анализ временных рядов. М.: МФТИ, 2002. 273 с. Nosko V. P. *Econometrics. Introduction to time series regression analysis*. Moscow: МИРТ, 2002, 273. (In Russ.)
4. Носко В. П. Эконометрика. М.: Дело, 2011. Кн. 1. 672 с. Nosko V. P. *Econometrics*. Moscow: Delo, 2011, book 1, 672. (In Russ.)
5. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с. Vasilyev F. P. *Methods of extreme tasks solution*. Moscow: Nauka, 1981, 400. (In Russ.)
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1988. 549 с. Vasilyev F. P. *Numerical methods of extreme tasks solutions*, 2nd ed. Moscow: Nauka, 1988, 549. (In Russ.)
7. Kiefer J., Wolfowitz J. Statistical estimation on the maximum of a regression function. *Ann. Math. Statist*, 1952, 23(3): 462–466. <https://doi.org/10.1214/AOMS/1177729392>
8. Лебедев И. В., Трескунов С. Л., Яковенко В. С. Элементы струйной автоматики. М.: Машиностроение, 1973. 360 с. Lebedev I. V., Treskunov S. L., Yakovenko V. S. *Elements of the jet automatics*. Moscow: Mashinostroenie, 1973, 360. (In Russ.)
9. Ermoliev Yu., Wets R. *Numerical techniques for stochastic optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1988, 586.
10. Sakalauskas L. Nonlinear stochastic optimization by Monte-Carlo estimators. *Informatica*, 2000, 11(4): 455–468.
11. Sakalauskas L. Nonlinear stochastic programming by Monte-Carlo estimators. *European Journal of Operational Research*, 2002, 137(3): 558–573.
12. Юдин Д. В. Математические методы управления в условиях неполной информации (задачи и методы стохастического программирования). М.: Советское радио, 1974. 400 с. Yudin D. V. *Mathematical methods of control in conditions of incomplete information (problems and methods of stochastic programming)*. Moscow: Sovetskoe radio, 1974, 400. (In Russ.)
13. Юдин Д. В., Юдин А. Д. Экстремальные модели в экономике. М.: Экономика, 1979. 289 с. Yudin D. V., Yudin A. D. *Extreme models in economics*. Moscow: Ekonomika, 1979, 289. (In Russ.)
14. Seiford L. M., Thrall R. M. Recent developments in DEA: the mathematical programming approach to frontier analysis. *Journal of Econometrics*, 1990, 46(1-2): 7–38. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(90\)90045-U](https://doi.org/10.1016/0304-4076(90)90045-U)

15. Kazan H., Baydar M. Performance measurement with data envelopment analysis in service industry: banking application. *Business Management Dynamics*, 2013, 3(5): 37–50.
16. Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979. 448 с.  
Vapnik V. N. *Estimation of dependences based on empirical data*. Moscow: Nauka, 1979, 448. (In Russ.)
17. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. М.: Статистика, 1980. 438 с.  
Zellner A. *An introduction to Bayesian inference in econometrics*. Moscow: Statistika, 1980, 438. (In Russ.)
18. Айвазян С. А. Байесовский подход в эконометрическом анализе. *Прикладная эконометрика*, 2008. № 1. С. 93–130.  
Aivazian S. A. Bayesian methods in econometrics. *Applied Econometrics*, 2008, (1): 93–130. (In Russ.)
19. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 491 с.  
De Groot M. *Optimal statistical decisions*. Moscow: Mir, 1974, 491. (In Russ.)
20. Хей Дж. Введение в методы байесовского статистического вывода. М.: Финансы и статистика, 1987. 336 с.  
Hei J. *Data in doubt: an introduction to Bayesian statistical inference for economists*. Moscow: Finansy i statistika, 1987, 336. (In Russ.)
21. Маркеев А. П. О принципе наименьшего принуждения. *Соросовский образовательный журнал*, 1998. № 1. С. 113–121.  
Markeyev A. P. A principal of least constraint. *Sorosovskii obrazovatelnyi zhurnal*, 1998, (1): 113–121. (In Russ.)
22. Зоркальцев В. И. Метод наименьших квадратов. Геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. Новосибирск: Наука, 1995. 219 с.  
Zorkaltsev V. I. *Least squares method. Geometric properties, alternative approaches, and applications*. Novosibirsk: Nauka, 1995, 219. (In Russ.)
23. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975. 348 с.  
Zulanke R., Vintgen P. *Differential geometry and bundles*. Moscow: Mir, 1975, 348. (In Russ.)
24. Strehler B. L., Mildvan A. S. General theory of mortality and aging. *Science*, 1960, 132(3418): 14–21. <https://doi.org/10.1126/science.132.3418.14>
25. Кофман Г. В. Уравнения роста и онтогенетическая аллометрия. *Математическая биология развития*, отв. ред. А. И. Зотин, Е. В. Преснов. М.: Наука. 1982. С. 49–55.  
Kofman G. V. Growth equations and ontogenetic allometry. *Mathematical biology of development*, eds. Zotin A. I., Presnov E. V. Moscow: Nauka, 1982, 49–55. (In Russ.)
26. Гаврилов Л. А., Гаврилова Н. С. Биология продолжительности жизни. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 280 с.  
Gavrilov L. A., Gavrilova N. S. *Biology of life span*. 2nd ed. Moscow: Nauka, 1991, 280. (In Russ.)
27. Мядзелец А. В., Черкашин А. К. Пространственные и временные индикаторы для сравнения условий развития экономики регионов России. *Региональные исследования*, 2016. № 3. С. 22–31.  
Myadzelets A. V., Cherkashin A. K. Spatial and temporal indicators to compare the conditions for developing the economy of Russian regions. *Regional'nye issledovaniya*, 2016, (3): 22–31. (In Russ.)
28. Myadzelets A. V. Modeling of the socio-economic potential of the Siberian regions with consideration for their economic-geographical position in the national economic system of the Russian Federation. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2009, 4(5): 158–175. <https://doi.org/10.1051/mmnp/20094511>
29. Вакуленко Е. С., Гурвич Е. Т. Взаимосвязь ВВП, безработицы и занятости: углубленный анализ закона Оукена для России. *Вопросы экономики*, 2015. № 3. С. 5–27. <https://doi.org/10.32609/0042-8736-2015-3-5-27>  
Vakulenko E. S., Gurvich E. T. The relationship of GDP, unemployment rate and employment: in-depth analysis of Okun's law for Russia. *Voprosy Ekonomiki*, 2015, (3): 5–27. (In Russ.) <https://doi.org/10.32609/0042-8736-2015-3-5-27>
30. Черкашин А. К. Математические основания синтеза знаний междисциплинарных исследований социально-экономических явлений. *Журнал экономической теории*, 2017. № 3. С. 108–124.  
Cherkashin A. K. Mathematical basis of knowledge synthesis in interdisciplinary research of social and economic phenomena. *AlterEconomics*, 2017, (3): 108–124. (In Russ.)
31. Черкашин А. К., Мядзелец А. В. Характеризация развития региональной экономики с учетом макроэкономических факторов и условий. *Экономика и математические методы*, 2017. Т. 53. № 4. С. 13–25.  
Cherkashin A. K., Myadzelets A. V. Characterization of regional economic development in response to macroeconomic factors and conditions. *Economics and Mathematical Methods*, 2017, (4): 13–25. (In Russ.)
32. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.  
Gelfand I. M., Fomin S. V. *Calculus of variations*. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 228. (In Russ.)
33. Jaeger L., Wagner C. Factor modeling and benchmarking of hedge funds: can passive investments in hedge fund strategies deliver? *The Journal of Alternative Investments*, 2005, 8(3): 9–36.

34. Аганбегян А. Г. Об особенностях современного мирового финансового кризиса и его последствий для России. *Деньги и кредит*. 2008. № 12. С. 3–9.  
Aganbegyan A. G. On specifics of current financial crisis and its consequences for Russia. *Russian Journal of Money and Finance*, 2008, (12): 3–9. (In Russ.)
35. Ершов М. Кризис 2008 года: «момент истины» для глобальной экономики и новые возможности для России. *Вопросы экономики*. 2008. № 12. С. 4–26. <https://doi.org/10.32609/0042-8736-2008-12-4-26>  
Ershov M. Crisis of 2008: "The moment of truth" for the global economy and new opportunities for Russia. *Voprosy Ekonomiki*, 2008, (12): 4–26. (In Russ.) <https://doi.org/10.32609/0042-8736-2008-12-4-26>
36. Шавшуков В. М. Глобальный финансово-экономический кризис: причины, природа, механизмы распространения. Антикризисные действия монетарных властей. *Экономические науки*. 2014. № 114. С. 121–125.  
Shavshukov V. M. The Global financial and economic crisis: causes, nature, mechanisms of distribution. Anti-crisis actions of the monetary authorities. *Ekonomicheskie nauki*, 2014, (114): 121–125. (In Russ.)
37. Groenewold N., Fraser P. Time-varying estimates of CAPM betas. *Mathematics and Computers in Simulation*. 1999, 48(4-6): 531–539.
38. Buckland R., Fraser P. Political and regulatory risk: beta sensitivity in U.K. electricity distribution. *Journal of Regulatory Economics*, 2001, 19(1): 5–25.