

УДК [637.146:66.081.6]:519.6

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ МЕМБРАННОГО КОНЦЕНТРИРОВАНИЯ
В АППАРАТАХ С ОТВОДОМ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО СЛОЯ**

Б.А. Лобасенко, Е.К. Сазонова*, П.А. Мусаев, С.Г. Пачкин

ФГБОУ ВО «Кемеровский технологический институт
пищевой промышленности (университет)»,
650056, Россия, г. Кемерово, б-р Строителей, 47

*e-mail: ketsn.kem@gmail.com

Дата поступления в редакцию: 16.07.2017

Дата принятия в печать: 04.09.2017

Аннотация. Предложена математическая модель мембранного концентрирования с использованием теории автоматического управления (передаточных функциях). Модель может быть использована для описания мембранных процессов в аппаратах с отводом поляризационного слоя различных конструкций. Модель учитывает технологические, конструктивные и режимные параметры как самого мембранного аппарата, так и отводящего устройства. Приведена информационная схема описанной модели, состоящая из двух условных элементов – мембранного модуля и отводящего устройства, что представляет собой базовую конструкцию мембранных аппаратов с отводом поляризационного слоя. Кроме того, в состав информационной схемы входят информационные связи. Дополнительно для связи между мембранным модулем и отводящим устройством в схему введены промежуточные параметры, являющиеся выходными для мембранного модуля и входными для отводящего устройства. Описана методика расчета передаточной функции системы. Проведена сравнительная оценка данных, полученных с использованием предложенной модели, с экспериментальными результатами исследования опытно-промышленной конструкции мембранного аппарата. Расхождение показателей концентрации сухих веществ в отводимом слое, полученных теоретическим путем по предложенной математической модели, и экспериментальных данных во всем диапазоне изменения технологических параметров процесса не превышает 10 %. По результатам оценки сделаны выводы, что предложенная математическая модель описывает объект моделирования адекватно и обладает достаточной прогностической способностью для применения при расчете промышленных установок. Данные экспериментальных исследований опытно-промышленной конструкции обработаны и представлены в виде уравнения регрессии, связывающего концентрацию отводимого поляризационного слоя от технологических параметров, получены их рациональные значения.

Ключевые слова. Мембраны, моделирование, поляризационный слой, передаточные функции

**MATHEMATICAL MODELING AND EXPERIMENTAL STUDIES
OF MEMBRANE CONCENTRATION IN APPARATUSES
WITH THE WITHDRAWAL OF THE POLARIZATION LAYER**

B.A. Lobasenko, E.K. Sazonova*, P.A. Musaev, S.G. Pachkin

Kemerovo Institute of Food Science
and Technology (University),
47, Boulevard Stroiteley, Kemerovo, 650056, Russia

*e-mail: ketsn.kem@gmail.com

Received: 16.07.2017

Accepted: 04.09.2017

Abstract. A mathematical model of membrane concentration using the Automation Control theory is *proposed*. The model can be used for describing membrane processes in different kinds of apparatuses that withdraw polarization layer. The model considers technical, constructive and conditional parameters of the membrane apparatus itself and those of the withdraw device. The information scheme of the described model is presented, consisting of two conventional elements - the membrane module and the withdrawal device, which is a basic representation of apparatuses that withdraw polarization layer. Also, the information schema contains information relations. In addition, to connect the membrane module and the withdrawal device, the scheme has been modified with intermediate parameters which are output for the membrane module and input for the withdraw device. A technique for calculating the transfer function of a system is described. Comparative evaluation of the values obtained using the given model and the experimental values of the industrial pilot membrane apparatus have been done. The difference between experimental data and observational studies with different parameters of the process does not exceed 10%. Based on the evaluation results, it has been concluded that the proposed mathematical model describes the modeling object adequately and has sufficient predictive power to be used in the calculation of industrial installations. Based on the results of experimental studies of the industrial pilot plant, the

regression equation has been obtained. The regression equation connects the concentration of the withdrawn polarization layer with technological parameters, whose rational values have been obtained.

Keywords. Membrane, modeling, polarization layer, transfer functions

Введение

Мембранные процессы получили достаточно широкое распространение в различных отраслях промышленности [1–7]. При этом актуальной задачей является совершенствование существующего оборудования и разработка нового. Мембранное оборудование с отводом поляризационного слоя является одним из перспективных направлений мембранной техники. Отвод поляризационного слоя позволяет сократить время, необходимое для переработки раствора, а одновременная очистка внутренней поверхности мембраны без остановки процесса мембранного разделения, применяемая в последних разработанных конструкциях аппаратов, позволяет сократить время вспомогательных операций на производстве и уменьшить финансовые затраты. Таким образом, использование мембранных аппаратов с отводом поляризационного слоя позволяет получать продукты высокого качества при сокращении их себестоимости по сравнению с использованием классических методов переработки.

Один из важнейших аспектов модернизации промышленного оборудования – максимальное сокращение времени между разработкой конструкции и промышленным внедрением готового технического решения. При этом необходимо, чтобы подбор необходимых параметров работы оборудования, конструктивных особенностей и ожидаемых результатов модернизации был максимально экономичен и проходил в сжатые сроки.

Для реализации описанных потребностей используется математическое моделирование. Достаточно широкое распространение получило моделирование с использованием теории автоматического управления (передаточных функций), в частности, при описании мембранных процессов [7]. Однако при всем многообразии математических моделей нет единого подхода при описании этих процессов,

происходящих в аппаратах, отличающихся различным конструктивным решением. В связи с этим достаточно актуальной задачей является разработка унифицированной модели, которая при необходимости могла быть использована с минимальными трудозатратами при описании мембранных процессов в различных конструкциях аппаратов.

Предложенная в данной статье модель соответствует описанным требованиям, является универсальной для различных конструкций мембранных аппаратов и использует типовой аппарат кибернетического моделирования, что делает возможным ее широкое применение при проектировании промышленного оборудования.

Объекты и методы исследования

Объектом исследования являются конструкции мембранных аппаратов с отводом поляризационного слоя. Предметом исследования является установление закономерностей процесса концентрирования с использованием математического моделирования на основе передаточных функций.

При разработке математической модели предпочтительно, чтобы она была универсальной и учитывала бы многообразие возможных конструкций. Поэтому ее целесообразно представлять в виде отдельных элементов, которые влияют на производительность процесса и качество получаемой продукции. В мембранных процессах это будут собственно мембрана (стандартные мембранные модули), производящие отвод фильтрата и являющиеся общим элементом всех аппаратов, а также способы и устройства, оказывающие существенное влияние на производительность и являющиеся частным элементом конструкций. Структурная схема аппаратов с отводом поляризационного слоя в общем виде представляет собой мембранный модуль и отводящее устройство (рис. 1) [8, 9].

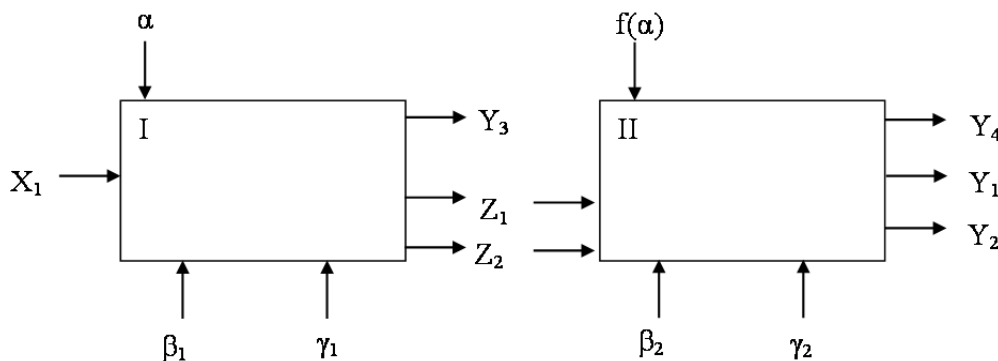


Рис. 1. Структурная схема мембранного аппарата с отводом поляризационного слоя:

элементы системы: I – мембранный блок; II – отводящее устройство; *входные параметры системы:* X_1 – концентрация сухих веществ в исходном растворе ($C_{вх}$); *возмущающие воздействия системы:* α – технологические параметры работы; $f(\alpha)$ – закономерности изменения технологических параметров (изменяются в зависимости от конкретного параметра и протекания процесса в аппарате); β_1 – конструктивные параметры мембранного блока; β_2 – конструктивные параметры отводящего устройства; γ_1 – режимные параметры работы мембранного модуля, γ_2 – режимные параметры работы отводящего устройства; *входные параметры отводящего устройства:* Z_1 – концентрация сухих веществ в концентрате (C_k); Z_2 – расход концентрата (F_k); *выходные параметры системы:* Y_1 – концентрация сухих веществ в отведенном поляризационном слое ($C_{пс}$); Y_2 – расход отводимого поляризационного слоя ($F_{пс}$); Y_3 – расход фильтрата (F_f), Y_4 – расход обедненного потока ($F_{об.п}$)

Подобная схема применима для мембранных аппаратов вне зависимости от метода отвода поляризационного слоя, используемого типа мембраны и перерабатываемого сырья, что позволяет применять ее в различных областях промышленности и для различных конструктивных решений.

Для простоты построения общего вида передаточной функции приведенной информационной схемы необходимо разделить ее на более мелкие части, состоящие из возмущающего воздействия, входного и выходного параметров (пример на рис. 2). Для построения передаточной функции такого элемента необходимо произвести воздействие по входному параметру и возмущающему воздействию.

После обработки всех частей системы полученные передаточные функции должны быть последовательно собраны воедино, в соответствии с их взаимосвязями, отраженными на информационной схеме (рис. 1). В результате будет получена передаточная функция всей исследуемой системы, отражающая влияние возмущающих воздействий и входных параметров системы на ее выходные параметры.

На основе полученной модели для конкретного оборудования могут быть рассчитаны оптимальные параметры работы, позволяющие получить продукт с необходимыми характеристиками при минимальной себестоимости.

Начнем построение передаточных функций с разделения схемы на основные части (мембранный модуль и отводящее устройство). В каждой части определим изучаемые возмущающие воздействия и выходные параметры. После чего для всех возможных пар определенных воздействий и параметров составим передаточные функции.

Например, для построения передаточной функ-

ции по мембранному модулю по каналам воздействия технологических параметров и параметру Z_1 необходимо нанести воздействие на систему по каналам X_1 и α (рис. 2).

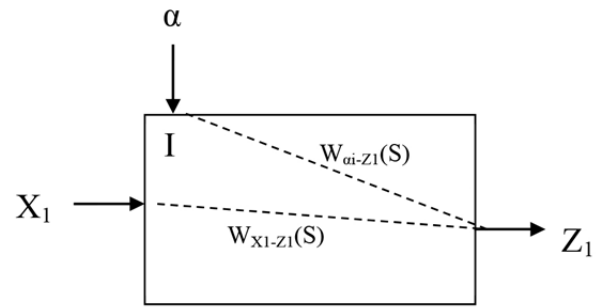


Рис. 2. Схема нанесения двух воздействий на систему (технологический параметр и концентрация сухих веществ в исходном растворе)

В результате получим передаточную функцию в общем виде (1):

$$W_{\alpha-Z_1}(S) = (Z_1(S) - X_1(S) * W_{X_1-Z_1}(S)) / \alpha_i(S). \quad (1)$$

Подобным образом строятся передаточные функции каждого исследуемого канала воздействия и каждого выходного параметра. Далее построенные функции объединяются для описания передаточной функции всей системы в целом, что позволяет математически описать воздействие всех анализируемых возмущающих воздействий и входных параметров на выходы системы.

Например, построим передаточную функцию в общем виде через параметр Z_1 для выходного параметра Y_1 по каналу воздействия технологических параметров (рис. 3).

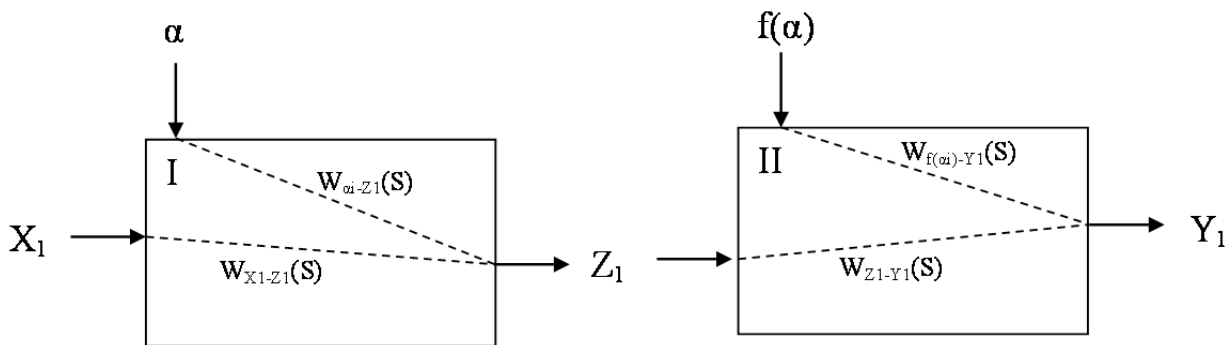


Рис. 3. Схема нанесения последовательных воздействий на систему

Для построения передаточной функции в общем виде по схеме (рис. 4) выразим Z_1 через (1). В результате получим (2)

$$W_{Y_1}(S) = X_1(S) * W_{X_1-Z_1}(S) * W_{Z_1-Y_1}(S) + \alpha_i(S) * W_{\alpha-Z_1}(S) * W_{Z_1-Y_1}(S) + f(\alpha_i)(S) * W_{f(\alpha)-Y_1}(S). \quad (2)$$

Аналогично получены передаточные функции всех выходных параметров по каналам воздействия всех учтенных параметров. Общий вид передаточ-

ной функции по каналам воздействия технологических параметров можно записать в следующем виде (3).

$$W_{Y_i}(S) = X_1(S) * W_{X_1-Z_1}(S) * W_{Z_1-Y_i}(S) * W_{X_1-Z_2}(S) * W_{Z_2-Y_i}(S) + \sum_{n=1}^n \alpha_i(S) * W_{\alpha-Z_1}(S) * W_{Z_1-Y_i}(S) * W_{\alpha-Z_2}(S) * W_{Z_2-Y_i}(S) + \sum_{n=1}^n f(\alpha_i)(S) * W_{f(\alpha)-Y_i}(S). \quad (3)$$

Аналогично построим общие виды передаточных функций по каналам воздействия конструктивных (4) и режимных (5) параметров, из формулы (3–5) может быть построена передаточная функция всей системы в общем виде (6)

$$W_{Yi}(S) = X_1(S) * W_{X_1-Z_1}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{X_1-Z_2}(S) * \\ * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{mi=1} \beta_{1i}(S) * W_{\beta_{1i-Z_1}}(S) * \quad (4)$$

$$* W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\beta_{1i-Z_2}}(S) * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{mi=1} \beta_{2i}(S) * W_{\beta_{2i-Yi}}(S);$$

$$W_{Yi}(S) = X_1(S) * W_{X_1-Z_1}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{X_1-Z_2}(S) * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{li=1} \gamma_{1i}(S) * W_{\gamma_{1i-Z_1}}(S) * \quad (5)$$

$$* W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\gamma_{1i-Z_2}}(S) * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{li=1} \gamma_{2i}(S) * W_{\gamma_{2i-Yi}}(S);$$

$$W_{Yi}(S) = X_1(S) * W_{X_1-Z_1}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * \\ * W_{X_1-Z_2}(S) * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{ni=1} \alpha_i(S) * \\ * W_{\alpha_i-Z_1}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\alpha_i-Z_2}(S) * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{ni=1} f(\alpha_i)(S) * W_{f(\alpha_i)-Yi}(S) + \sum_{mi=1} \beta_{1i}(S) * W_{\beta_{1i-Z_1}}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\beta_{1i-Z_2}}(S) * \\ * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{mi=1} \beta_{2i}(S) * W_{\beta_{2i-Yi}}(S) + \sum_{li=1} \gamma_{1i}(S) * W_{\gamma_{1i-Z_1}}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\gamma_{1i-Z_2}}(S) * \\ * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{li=1} \gamma_{2i}(S) * W_{\gamma_{2i-Yi}}(S).$$

$$* W_{\alpha_i-Z_1}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\alpha_i-Z_2}(S) * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{ni=1} f(\alpha_i)(S) * W_{f(\alpha_i)-Yi}(S) + \sum_{mi=1} \beta_{1i}(S) * W_{\beta_{1i-Z_1}}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\beta_{1i-Z_2}}(S) * \\ * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{mi=1} \beta_{2i}(S) * W_{\beta_{2i-Yi}}(S) + \sum_{li=1} \gamma_{1i}(S) * W_{\gamma_{1i-Z_1}}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\gamma_{1i-Z_2}}(S) * \\ * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{li=1} \gamma_{2i}(S) * W_{\gamma_{2i-Yi}}(S). \quad (6)$$

$$* W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{mi=1} \beta_{2i}(S) * W_{\beta_{2i-Yi}}(S) + \sum_{li=1} \gamma_{1i}(S) * W_{\gamma_{1i-Z_1}}(S) * W_{Z_1-Yi}(S) * W_{\gamma_{1i-Z_2}}(S) * \\ * W_{Z_2-Yi}(S) + \sum_{li=1} \gamma_{2i}(S) * W_{\gamma_{2i-Yi}}(S).$$

Далее для получения частного вида передаточной функции конкретной исследуемой системы необходимо на основе экспериментальных исследований построить передаточные функции по всем анализируемым каналам и найти закономерности изменения технологических параметров $f(\alpha)$, описывающие каким образом изменяются технологические параметры при протекании процесса в отводящем устройстве по сравнению с заданными в мембранном модуле параметрами.

Предложенная математическая модель на основе кибернетического моделирования может быть применена к любым конструкциям мембранных аппаратов, общая схема функционирования которых соответствует приведенной информационной схеме (рис. 1).

Для получения частного случая предложенной модели для конкретного аппарата необходимо построить все учитываемые передаточные функции W , найти закономерности изменения технологических параметров $f(\alpha_i)$. Закономерности $f(\alpha)$ отражают изменение технологического параметра при протекании процесса в отводящем устройстве от

этого же параметра в мембранном модуле. Например, давление среды в мембранном модуле и отводящем устройстве будет отличаться, однако воздействовать на давление в отводящем устройстве без изменений давления в мембранном модуле невозможно в связи с конструкцией аппаратов с отводом поляризационного слоя. В то же время давление среды в отводящем устройстве неразрывно связано с давлением в мембранном модуле. Однако конкретные закономерности изменения технологических параметров могут быть построены только для каждого конкретного исследуемого аппарата отдельно. При незначительном различии величины технологического параметра в мембранном модуле и отводящем устройстве закономерностями $f(\alpha)$ можно пренебречь и использовать для расчетов единые значения параметров α как для мембранного модуля, так и для отводящего устройства. Воздействия, влияние которых на систему незначительно либо не поддается экспериментальному исследованию, могут быть приравнены к нулю и, тем самым, удалены из расчета.

Использование операционного исчисления

Операционное исчисление широко применяется в различных отраслях науки и техники благодаря универсальности, простоте использования и сокращению затрат времени на математическую обработку. С его помощью можно простые дифференциальные и интегральные уравнения свести к алгебраическим. После получения решения алгебраического уравнения его восстанавливают по изображению.

Установим связь между ПФ $W(S)$ звена (системы) и типовыми выходными характеристиками – переходной $h(t)$ функциями.

Операционный метод (метод операционного исчисления) позволяет описывать и анализировать системы в форме передаточных функций. [2] В основе метода лежит преобразование Лапласа (7) [9].

$$W(S) = L\{x(t)\} = S \cdot \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-St} dt \quad (7)$$

Известно, что концентрация поляризационного слоя циклически изменяется от продолжительности. В этом случае параметры определяются графически по формулам (8–10)

$$k = h(\infty) \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{\ln(a_1/a_2)}{t_2 - t_1} \quad (9)$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{t_2 - t_1} \quad (10)$$

С учетом этого (11)

$$\begin{aligned}
 W(S) &= S \cdot \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-S \cdot t} dt = S \cdot \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-S \cdot t} dt = S \cdot dt = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k \cdot S \int_0^n \left(1 - (\cos \omega \cdot t + m \cdot \sin \omega \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \right) \cdot e^{-S \cdot t} dt \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[k \cdot S \cdot \int_0^n \left(1 - (\cos \omega \cdot t + m \cdot \sin \omega \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \right) \cdot e^{-S \cdot t} dt \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[k \cdot S \cdot \int_0^n \left(e^{-S \cdot t} - \cos \omega \cdot t \cdot e^{(-\alpha - S) \cdot t} - m \cdot \sin \omega \cdot t \cdot e^{(-\alpha - S) \cdot t} \right) dt \right] = \\
 &= k \cdot S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-S \cdot t} dt \right) - k \cdot S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n \cos \omega \cdot t \cdot e^{(-\alpha - S) \cdot t} dt \right) - \\
 &\quad - k \cdot m \cdot S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n \sin \omega \cdot t \cdot e^{(-\alpha - S) \cdot t} dt \right) = k \cdot S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{S} \cdot e^{-S \cdot t} \right) - \\
 &\quad - k \cdot S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\alpha - S}{(-\alpha - S)^2 + \omega^2} \cdot e^{-(\alpha + S) \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{\omega}{(-\alpha - S)^2 + \omega^2} \cdot e^{-(\alpha + S) \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right) - \\
 &\quad - k \cdot m \cdot S \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\omega}{(-\alpha - S)^2 + \omega^2} \cdot e^{-(\alpha + S) \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{-\alpha - S}{(-\alpha - S)^2 + \omega^2} \cdot e^{-(\alpha + S) \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right) = \\
 &= k \cdot S \cdot \frac{1}{S} + k \cdot S \cdot \frac{\alpha + S}{(-\alpha - S)^2 + \omega^2} - k \cdot m \cdot S \cdot \frac{\omega}{(-\alpha - S)^2 + \omega^2} = \\
 &= \frac{k \cdot \left((-\alpha - S)^2 + \omega^2 \right) + k \cdot S \cdot (\alpha + S) - k \cdot m \cdot S \cdot \omega}{(-\alpha - S)^2 + \omega^2} = \\
 &= \frac{k \cdot \left((-\alpha - S)^2 + \omega^2 \right) + k \cdot S \cdot (\alpha + S) - k \cdot m \cdot S \cdot \omega}{\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot S + S^2 + \omega^2} = \\
 &= \frac{-k \cdot \left(\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot S + S^2 + \omega^2 \right) + k \cdot S \cdot (\alpha + S) - k \cdot m \cdot S \cdot \omega}{\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot S + S^2 + \omega^2} = \\
 &= \frac{-k \cdot S^2 - 2 \cdot \alpha \cdot S \cdot k + k \cdot \left(\alpha^2 + \omega^2 \right) + k \cdot S^2 + k \cdot S \cdot \alpha + k \cdot m \cdot S \cdot \omega}{\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot S + S^2 + \omega^2} = \\
 &= \frac{-2 \cdot \alpha \cdot S \cdot k + k \cdot \left(\alpha^2 + \omega^2 \right) + k \cdot S \cdot \alpha + k \cdot m \cdot S \cdot \omega}{\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot S + S^2 + \omega^2} = \frac{-\alpha \cdot S \cdot k + k \cdot \left(\alpha^2 + \omega^2 \right) + k \cdot m \cdot S \cdot \omega}{\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot S + S^2 + \omega^2} = \\
 &= \frac{(-\alpha \cdot k + k \cdot m \cdot \omega) \cdot S + k \cdot \left(\alpha^2 + \omega^2 \right)}{\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot S + S^2 + \omega^2} = \frac{k \cdot \left(\alpha^2 + \omega^2 \right)}{S^2 + 2 \cdot \alpha \cdot S + \alpha^2 + \omega^2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Параметры переходной функции определяются графически. Передаточная функция данного звена имеет вид (12).

$$W(S) = \frac{k \cdot \left(\alpha^2 + \omega^2 \right)}{S^2 + 2 \cdot \alpha \cdot S + \alpha^2 + \omega^2}, \tag{12}$$

где α – параметр затухания; k – коэффициент усиления объекта; ω – частота собственных колебаний с учетом демпфирования.

Также могут быть рассчитаны экспоненциальные воздействия на систему.

1. Убывающее единичное экспоненциальное воздействие (13).

$$x(t) = e^{-t/T}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-t/T} \cdot e^{-st} dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} e^{-(\frac{1}{T}+s)t} dt =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-\frac{1}{T}-s} \right) e^{(\frac{1}{T}+s)t} = \frac{T}{Ts+1}$$

$$W(s) = s \cdot F(s) = s \cdot \frac{T}{Ts+1} = \frac{Ts}{Ts+1}. \quad (13)$$

2. Возрастающее единичное экспоненциальное воздействие (14).

$$x(t) = 1 - e^{-t/T}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-t/T}) \cdot e^{-st} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \left[e^{-st} - e^{-(\frac{1}{T}+s)t} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{Ts}{Ts+1} = \frac{Ts+1-T}{Ts^2+s}$$

$$W(s) = s \cdot F(s) = s \cdot \frac{Ts+1-T}{Ts^2+s} = \frac{Ts-T+1}{Ts+1}. \quad (14)$$

Применение операционного исчисления в кибернетическом моделировании позволяет сократить время, необходимое для расчета, и повысить его точность.

Результаты и их обсуждение

Экспериментальные исследования осуществлялись на опытно-промышленной конструкции мембранного аппарата, аналогом которой служил патент [11]. Экспериментальные исследования проводились с использованием полного факторного эксперимента.

На исследуемой лабораторной установке не проводился анализ конструктивных параметров, однако в информационной схеме (рис. 1) они присутствуют, т.к. схема является универсальной для широкого круга аппаратов, в то время как приведенное экспериментальное исследование является лишь частным случаем использования предложен-

ной математической модели. Использование избыточного количества исследуемых факторов системы позволяет при необходимости быстро адаптировать ее к более широкому кругу лабораторных установок и аппаратов.

В качестве исходной среды было использовано обезжиренное молоко с концентрацией сухих веществ 5,15 % масс.

Для определения численных значений выходных параметров мембранного модуля были использованы аналитические методы по причине сложности их инструментального измерения. Аналитические зависимости представлены ниже (15, 16).

$$Z_1 = (Y_1 * Y_2 + C_{об.р.} * Y_4) / Z_2, \quad (15)$$

где $C_{об.р.}$ – концентрация обедненного раствора ($C_{об.р.} = 3,87$).

$$Z_2 = Y_2 + Y_4. \quad (16)$$

Для используемых входных параметров и возмущающих воздействий были определены следующие допустимые диапазоны изменений:

- температура исходного сырья 20–60 °С, (20 °С – средняя температура производственных помещений, 60 °С – температура денатурации белков коровьего молока);

- концентрация сухих веществ в сырье 5,15 % (используется обезжиренное молоко с такой концентрацией сухих веществ);

- критерий Рейнольдса для потока внутри мембраны – до 2300 (при таких значениях обеспечивается ламинарный режим течения среды, что благоприятно для сохранения концентрации поляризационного слоя).

В результате исследования и обработки результатов были получены передаточные функции, описывающие взаимосвязи системы.

После подстановки полученных значений в общий вид математической модели с помощью математического программного обеспечения получена частная математическая модель, описывающая работу опытно-промышленного аппарата.

Обработка экспериментальных данных позволила получить уравнение регрессии, описывающее зависимость содержания сухих веществ от технологических параметров.

Выборочное уравнение регрессии в безразмерном масштабе имеет вид (17).

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3, \quad (17)$$

где x_1 – давление среды; x_2 – режим течения среды; x_3 – время обработки.

Исключаем из уравнения путем приравнивания к нулю незначимые коэффициенты b_{13} и b_{123} . Пос-

ле этого уравнение регрессии в безразмерном масштабе имеет вид (18).

Уравнение регрессии в натуральном масштабе (19).

$$\hat{y} = 6,41 + 0.035 \cdot x_1 + 0.183 \cdot x_2 + 0.042 \cdot x_3 + 0.058 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.039 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad (18)$$

$$y = 6.3273 + 0.0091 \cdot P + 5.63 \cdot 10^{-5} \cdot Re - 9.1 \cdot 10^{-4} \cdot t - 4 \cdot 10^{-4} \cdot P \cdot Re - 3 \cdot 10^{-6} \cdot Re \cdot t . \quad (19)$$

После анализа и обработки полученных экспериментальных данных были получены следующие рациональные значения параметров переработки: $t = 20$ мин, $P = 3$ МПа, $Re = 1500$, $C(3; 1500; 40) = 6,4$ % масс.

Увеличение концентрации сухих веществ в отводимом слое по сравнению с концентрацией в исходном растворе составляет от 8,5 до 17 % для обезжиренного молока.

Данная конструкция позволяет повысить концентрацию поляризационного слоя в среднем на 17–20 % по сравнению с концентрацией раствора в канале аппарата. Полученные данные говорят о перспективности предложенной конструкции для промышленного применения.

Оценка прогностической способности

Оценка прогностической способности модели была проведена по полученным экспериментальным данным путем подстановки исходных параметров экспериментов в модель. Расхождение показателей концентрации сухих веществ в отводимом слое, полученных теоретически, путем расчета по предложенной математической модели и полу-

ченных экспериментально во всем диапазоне изменения технологических параметров процесса не превышает 10 %, что свидетельствует о достаточной адекватности модели и делает ее применимой для расчета и проектирования промышленного оборудования.

Выводы

Предложена математическая модель, которая может быть использована для различных конструкций мембранных аппаратов. Ее сравнительная оценка с данными, полученными экспериментальным путем, проведенная на опытно-промышленной конструкции, показала ее адекватность и достаточную прогностическую способность для ее применения в проектировании промышленного оборудования.

Предложенная модель может быть использована для широкого круга мембранных аппаратов. Ее применение сократит продолжительность математического моделирования и позволит уменьшить время, необходимое от разработки новой модели, до внедрения ее в производство.

Список литературы

1. Свитцов, А.А. Введение в мембранную технологию / А.А. Свитцов. – М.: ДеЛи Принт, 2007. – 208 с.
2. Мулдер, М. Введение в мембранную технологию: пер. с англ. / М. Мулдер. – М.: Мир, 1999. – 513 с.
3. Дытнерский, Ю.И. Баромембранные процессы. Теория и расчет / Ю.И. Дытнерский. – М.: Химия, 1986. – 272 с.
4. Фетисов, Е.А. Мембранные и молекулярно-ситовые методы переработки молока / Е.А. Фетисов, А.П. Чагаровский. – М., Агропромиздат, 1991. – 272 с.
5. Брок, Т.Д. Мембранная фильтрация: пер.с англ. / Т.Д. Брок. – М.: Мир, 1987. – 464 с.
6. Гаврилов, Г.Г. Технология мембранных процессов переработки молочной сыворотки и создание продуктов с функциональными свойствами: монография / Г.Г. Гаврилов. – М.: Россельхозакадемия, 2006. – 134 с.
7. Drioli, Enrico. Membrane Contactors: Fundamentals, Applications and Potentialities / Enrico Drioli, A. Criscuoli, E. Curcio // Membrane Science and Technology. – 2005. – Vol. 11. – 516 p.
8. Лобасенко, Б.А. Математическое моделирование процесса мембранного концентрирования на основе кибернетического подхода / Б.А. Лобасенко, Р.В. Котляров, Е.К. Сазонова // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 2–1. – С. 70–75.
9. Котляров, Р.В. Моделирование процесса мембранного концентрирования молочных сред и разработка аппаратурных схем установок: автореферат дисс. ... канд. техн. наук: 05.18.12. – Кемерово, 2009. – 17 с.
10. Baeumer, B. Unbounded functional calculus for bounded groups with applications / B. Baeumer, M. Kovács, M. Haase // Journal of Evolution Equations. – 2009. – Vol. 9. – № 1. – P. 171–195.
11. Патент № 2181619 Российская Федерация. Аппарат для мембранного концентрирования / Лобасенко Б.А., Сафонов А.А., Лобасенко Р.В., Черданцева А.А.; заявитель и патентообладатель Лобасенко Б.А. – Оpubл. 27.04.2002 в Б.И. № 12.

References

1. Svittsov A.A. *Vvedenie v membrannuyu tekhnologiyu* [Introduction to membrane technology]. Moscow: DeLi Print Publ., 2007. 208 p.
2. Mulder M. *Vvedenie v membrannuyu tekhnologiyu* [Introduction to membrane technology]. Moscow: Mir Publ., 1999. 513 p.
3. Dytnerskiy Yu.I. *Baromembrannye protsessy. Teoriya i raschet*. [Baromembrane processes. Theory and calculation]. Moscow: Khimiya Publ., 1986. 272 p.
4. Fetisov E.A., Chagarovskiy A.P. *Membrannye i molekulyarno-sitovye metody pererabotki moloka* [Membrane and molecular sieve methods of milk processing]. Moscow: Agropromizdat Publ., 1991. 272 p.
5. Brok T.D. *Membrannaya fil'tratsiya* [Membrane filtration]. Moscow: Mir Publ., 1987. 464 p.
6. Gavrilov G.G. *Tekhnologiya membrannykh protsessov pererabotki molochnoy syvorotki i sozdanie produktov s funktsional'nymi svoystvami* [Technology of membrane processes of whey processing and creation of products with functional properties]. Moscow: Rossel'khozakademiya Publ., 2006. 134 p.
7. Enrico Drioli, Criscuoli A., Curcio E.. *Membrane Contactors: Fundamentals, Applications and Potentialities*, vol. 11. E Rende (CS) Italy: Elsevier Science Publ., 2005. 516 p.
8. Lobasenko B.A., Kotlyarov R.V., Sazonova E.K. *Matematicheskoe modelirovanie protsessa membrannogo kontsentrirvaniya na osnove kiberneticheskogo podkhoda* [Mathematical modeling of membrane concentration based cybernetic approach]. *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental research], 2016, no. 2–1, pp.70–75.

9. Kotlyarov R.V. *Modelirovanie protsessa membrannogo kontsentrirvaniya molochnykh sred i razrabotka apparatnykh skhem ustanovok. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk.* [Modeling of the process of membrane concentration of dairy media and development of apparatus diagrams of plants. Cand. eng. sci. thesis]. Kemerovo, 2009. 17 p.

10. Baeumer B., Haase M., Kovács M., Unbounded functional calculus for bounded groups with applications, *J. Evol. Equ.*, 2009, vol. 9, no. 1, pp.171–195.

11. Lobasenko B.A., Safonov A.A., Lobasenko R.B., Cherdantseva A.A. *Apparat dlya membrannogo kontsentrirvaniya* [Apparatus for membrane concentration]. Patent RF, no. 2181619, 2002.

Дополнительная информация / Additional Information

Математическое моделирование и экспериментальные исследования мембранного концентрирования в аппаратах с отводом поляризационного слоя / Б.А. Лобасенко, Е.К. Сазонова, П.А. Мусаев, С.Г. Пачкин // Техника и технология пищевых производств. – 2017. – Т. 46. – № 3. – С. 152–159.

Lobasenko B.A., Sazonova E.K., Musaev P.A., Pachkin S.G. Mathematical modeling and experimental studies of membrane concentration in apparatuses with the withdrawal of the polarization layer. *Food Processing: Techniques and Technology*, 2017, vol. 46, no. 3, pp. 152–159 (In Russ.).

© Лобасенко Борис Анатольевич

д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры технологического проектирования пищевых производств, ФГБОУ ВО «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности (университет)», 650056, Россия, г. Кемерово, б-р Строителей, 47, e-mail: tppp@kemtipp.ru

© Сазонова Екатерина Константиновна

аспирант кафедры технологического проектирования пищевых производств, ФГБОУ ВО «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности (университет)», 650056, Россия, г. Кемерово, б-р Строителей, 47, e-mail: ketsn.kem@gmail.com

© Мусаев Парвизжон Абдурашидович

магистрант кафедры технологического проектирования пищевых производств, ФГБОУ ВО «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности (университет)», 650056, Россия, г. Кемерово, б-р Строителей, 47

© Пачкин Сергей Геннадьевич

канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и АСУ, ФГБОУ ВО «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности (университет)», 650056, Россия, г. Кемерово, б-р Строителей, 47

© Boris A. Lobasenko

Dr.Sci.(Eng.), Associate Professor, Professor of the Department of Technological Design of Food Production, Kemerovo Institute of Food Science and Technology (University), 47, Boulevard Stroiteley, Kemerovo, 650056, Russia, e-mail: tppp@kemtipp.ru

© Ekaterina K. Sazonova

Postgraduate Student of the Department of Technological Design of Food Production, Kemerovo Institute of Food Science and Technology (University), 47, Boulevard Stroiteley, Kemerovo, 650056, Russia, e-mail: ketsn.kem@gmail.com

© Parvizgon A. Musaev

Graduate Student of the Department of Technological Design of Food Production, Kemerovo Institute of Food Science and Technology (University), 47, Boulevard Stroiteley, Kemerovo, 650056, Russia

© Sergey G. Pachkin

Cand.Sci.(Eng.), Associate Professor of the Department of Production Processes Automation and Automation Systems, Kemerovo Institute of Food Science and Technology (University), 47, Boulevard Stroiteley, Kemerovo, 650056, Russia

